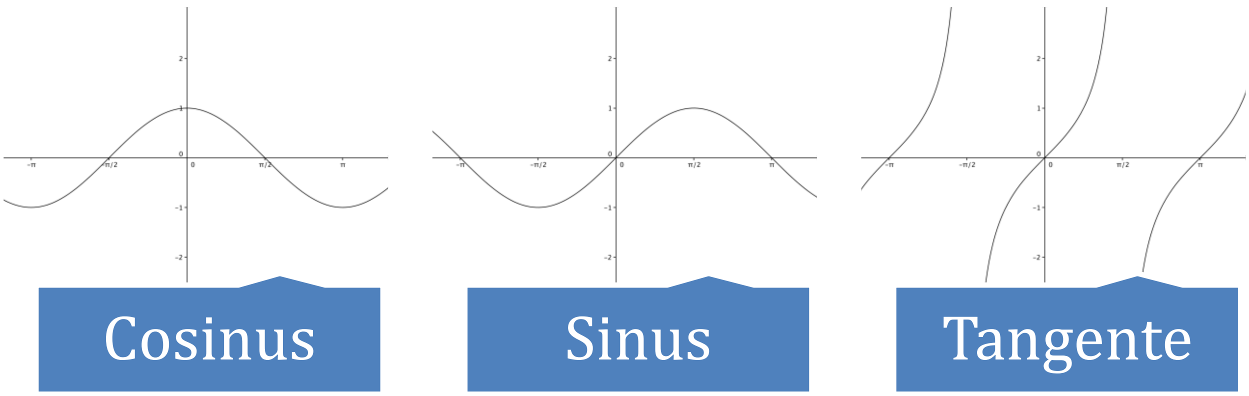
Fonctions trigonométriques

1. Définitions

Les fonctions trigonométriques les plus couramment utilisées sont le cosinus, le sinus et la tangente. Les fonctions sin et cos sont définies, continues et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction tan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\,(k\in\mathbb{Z})$
Il existe plusieurs façons de définir les fonctions sinus, cosinus et tangente, ici, nous utiliserons une approche graphique.

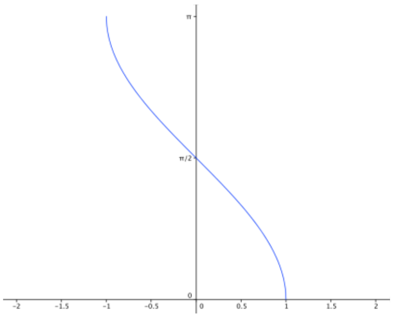
Le cosinus peut être défini comme l'abscisse d'un point sur un cercle de rayon 1 centré à l'origine d'un repère orthonormé et le sinus son ordonnée. L'angle concerné étant celui entre l'axe des x et la droite passant par le point et l'origine.
La tangente peut être défini comme l'ordonnée de l'intersection entre la droite passant par le point concerné et l'origine et la droite x=1.



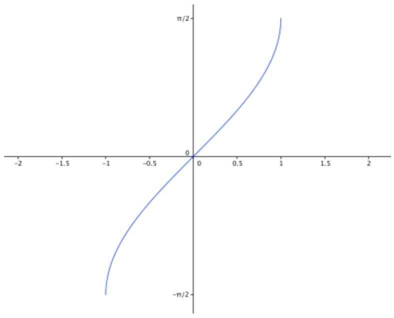
2. Fonctions réciproques

Associées à ces fonctions, existent les fonctions dites trigonométriques réciproques telles que

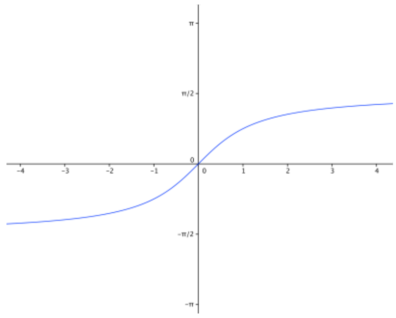
$$y=\arcsin(x)\Leftrightarrow x=\sin(y)\quad\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$$
$$y=\arccos(x)\Leftrightarrow x=\cos(y)\quad(y\in[0;\pi])$$
$$y=\arctan(x)\Leftrightarrow x=\tan(y)\quad\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$$



Arccosinus



Arcsinus



Arctangente

3. Dérivées des fonctions trigonométriques

Toutes les fonctions trigonométriques sont dérivables et on a :

Fonctions	Dérivée
Cos(x)	-Sin(x)
Sin(x)	Cos(x)
Tan(x)	$\dfrac{1}{cos^2(x)}$
Arccos(x)	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcsin(x)	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arctan(x)	$\dfrac{1}{1+x^2}$

4. Propriétés

De l'approche graphique, nous pouvons remarquer quelques propriétés importantes du sinus et du cosinus :

- leur 2π périodicité
- la parité du cosinus et l’imparité du sinus *(image d’angles opposés)* et les relations suivantes :

$$\cos(a+\pi)=-\cos(a)$$
$$\sin(a+\pi)=-\sin(a)$$
$$\cos(\pi/2-a)=\sin(a)$$
$$\sin(\pi/2-a)=\cos(a)$$
$$\cos(\pi/2+a)=-\sin(a)$$
$$\sin(\pi/2+a)=\cos(a)$$

cos(π-a)=-cos(a)
sin(π-a)=-sin(a)

- leurs valeurs pour quelques angles remarquables :

X	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3 π/2
Cos(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
Sin(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1
Tan(x)	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	tend vers ∞	0	tend vers ∞

- Quel que soit x,$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

D'autres propriétés « calculatoires » des fonctions :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

- De ces formules, on peut en déduire :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin(\frac{p-q}{2})$$

(se démontre on posant p=(a+b)/2 et q=(a-b)/2)

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$